Teoretická část - 24.5.2022

1. (a) Definujte prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (2 body).

   (b) Definujte Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci pro prvky $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ a zformulujte větu o Fourierově transformaci na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (2 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ a $\varphi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

      i. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi \mathcal{F}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi \mathcal{F}(\varphi)$,

      ii. pro zobrazení $T_\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definované jako

      $$T_\varphi(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\psi, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

      platí $T_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ a $\mathcal{F}(T_\varphi) = T_{\mathcal{F}(\varphi)}$, kde $T_{\mathcal{F}(\varphi)}$ je definováno jako

      $$T_{\mathcal{F}(\varphi)}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi)\psi, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

      iii. $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)) = T$, $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = T$,

      iv. pokud $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(S)$, potom $T = S$,

      v. je-li $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, potom zobrazení $T_f : \varphi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\varphi$ je dobře definovaná temperovaná distribuce.

   Vše řádně zdůvodněte (4 body).

2. (a) Definujte Laurentovu řadu a reziduum (včetně rezidua v nekonečnu) $(1,5$ bodu).

   (b) Definujte singularity holomorfních funkcí (stačí v konečných bodech) a zformulujte větu o charakterizaci typů singularit $(2,5$ bodu).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otevřenou a $f, g \in H(\Omega)$ mající v bodě a izolovanou singularitu:

      i. je-li $U(a,1,2) \subset \Omega$ a $f = g$ na $U(a,0,1)$, potom f a g mají stejnou Laurentovu řadu na $U(a,1,2)$.

      ii. je-li $U(a,1,2) \subset \Omega$ a $f = g$ na množině

$$\{z \in U(a,1,2) : \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(a)\},$$

      potom f a g mají stejnou Laurentovu řadu na $U(a,1,2)$.

      iii. má-li f v bodě a odstranitelnou singularitu, potom $\mathrm{Res}(f,a) \neq 0$,

      iv. má-li f v bodě a pól, potom $\mathrm{Res}(f,a) \neq 0$,

      v. má-li f v bodě a podstatnou singularitu, potom $\mathrm{Res}(f,a) \neq 0$.

   Vše řádně zdůvodněte (4 body).

3. (a) Definujte komplexní derivaci a Caychy-Riemannovy rovnice (2 body).

   (b) Zformulujte lemma o tvaru komplexní derivace a větu o vztahu Caychy-Riemannových rovnic a komplexní derivace (2 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kde používáme značení $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ a $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$:

      i. je-li f holomorfní na $\mathbb{C}^+$, potom je funkce $z \mapsto \overline{f(z)}$ holomorfní na $\mathbb{C}^+$,

      ii. je-li f holomorfní na $\mathbb{C}^+$, potom je funkce $z \mapsto f(\overline{z})$ holomorfní na $\mathbb{C}^-$,

      iii. je-li f holomorfní na $\mathbb{C}^+$, potom je funkce $z \mapsto f(-z)$ holomorfní na $\mathbb{C}^-$,

      iv. je-li f holomorfní na $\mathbb{C}^+$, potom je funkce $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ holomorfní na $\mathbb{C}^-$.

      Vše řádně zdůvodněte (4 body).